数理解析研究所講究録
372巻 1979年 63-74

Links of complex isolated singularities

東大 教養　森田茂之

1. 序　V^{r+1} を複素 $(n+1)$−空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の $(r+1)$ 次元 analytic set, $P \in V$ を孤立特異点とする。点 P を中心とする半径 ε の球面を S_ε^{2n+1} とし, $L = V \cap S_\varepsilon^{2n+1}$ とおくと ε が十分小さいとき L は $(2r+1)$ 次元向きづけられた C^∞− 多様体となる。L の S_ε^{2n+1} の中での法束を ν とすると, ν には自然に $p\ (= n-r)$ 次元複素ベクトル束の構造が入る。$BU(p)$ を p 次元複素ベクトル束の分類空間, ξ をその上の普遍ベクトル束とする。ξ の適当な metric に関する disk 及び sphere bundle をそれぞれ $D(\xi)$, $S(\xi)$ とする。商空間 $D(\xi)/S(\xi)$ は普通 $MU(p)$ と記されて Thom space と呼ばれている。さて $f: L \to BU(p)$ を ν の分類写像とする。ν にも適当に metric を入れておくと f は写像 $f': D(\nu)/S(\nu) \longrightarrow MU(p)$ を誘導する。さて L の S_ε^{2n+1} の中での管状近傍を T とすると対 $(T, \partial T)$ と $(D(\nu), S(\nu))$ とは

微分同相である。そこで写像

$$\alpha : S_\varepsilon^{2n+1} \to T/\partial T \cong D(V)/S(V) \xrightarrow{f'} MU(p)$$

を考える。ここで才一の写像は S_ε^{2n+1} において T の補集合を一点につぶす写像である。 α はホモトピー群 $\pi_{2n+1}(MU(p))$ の元を定義する。この元を以後 $\theta(V, P)$ と記す。以上の構成は Pontrjagin − Thom の construction と呼ばれているもので コボルディズム理論において基本的なものである。 さて $p=1$ としよう。このときには 点 P のまわりでいわゆる Milnor ファイバーと呼ばれているものを考えることにより容易に $\theta(V, P)=0$ となる。更に一般に 特異点 P が適当な意味で smoothable とすると (たとえば Hartshorne [3] 参照) $\theta(V, P)=0$となる。実際 $\theta(V, P)$ は特異点の smoothability へのある位相的障害を与えているのである。本稿では $\theta(V, P)$ に関する Sullivan の予想 [9] とそれに関連する topics の紹介をしたい。

2. 極小モデル

この節では Sullivan による極小モデルの理論を簡単にまとめておく。詳しくは [2] [8][9] を参照されたい。

M を C^∞−多様体とする。$\Omega^*(M)$ を M の

de Rham 複体とすると de Rham の定理により $\Omega^*(M)$ は M の実コホモロジーを与える： $H^*(\Omega^*(M)) \cong H^*(M;\mathbb{R})$。Sullivan の理論のひとつの重要な帰結は 複体 $\Omega^*(M)$ から M の 実ホモトピー型が完全に決定できるというものである。少し詳しく説明しよう。簡単のため以後は M は単連結かつ $H^*(M;\mathbb{R})$ 有限次元とする。

定義　$\mathbb{R}$ 上の differential graded algebra（以後 DGA と略記する） $\mathcal{M} = \bigoplus_{q\geq 0} \mathcal{M}^q$ が $\Omega^*(M)$ の（又は M の）モデルであるとは DGA 写像 $f : \mathcal{M} \to \Omega^*(M)$ で $f^* : H^*(\mathcal{M}) \to H^*(\Omega^*(M))$ が同型となるものが存在するときをいう。

定義　DGA $\mathcal{M}$ が M の極小モデルであるとは $\mathcal{M}$ はモデルであって 二条件 (i) $\mathcal{M}$ は graded algebra として自由 (ii) $d\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^+\mathcal{M}^+$ つまり $\mathcal{M}$ の微分 d による image は decomposable elements より成る。をみたすときをいう。

次の定理は基本的である。

定理1　(i)　M には極小モデル $\rho : m(M) \to \Omega^*(M)$ が存在する。

(ii)　$\rho' : m'(M) \to \Omega^*(M)$ を他の極小モデルとするとある DGA 写像 $f : m(M) \to m'(M)$ が存在し $f^* : H^*(m(M)) \cong H^*(m'(M))$ かつ ρ と $\rho' \circ f$ とは次の意味でホモトープである。即ち DGA 写像 $F : m(M) \to \Omega^*(M) \otimes (t, dt)$ が存在して $F|_{t=0, dt=0} = \rho$, $F|_{t=1, dt=0} = \rho' \circ f$ 。ここに (t, dt) は $R[t] \otimes \Lambda(dt)$ で t の次数 $=0$, dt の次数 $=1$ とする。

(iii)　$f : M \to N$ を C^∞-写像とする。このとき DGA 写像 $\hat{f} : m(N) \to m(M)$ がホモトピーを除いて唯一つ存在し次の図式をホモトピー可換にする。

$$\begin{array}{ccc} m(N) & \xrightarrow{\hat{f}} & m(M) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \Omega^*(N) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^*(M) \end{array}$$ 。

さて M のホモトピー群 $\pi_*(M)$ には Whitehead 積と呼ばれる演算が定義される。即ち $\pi_p(M)$ の元 α と $\pi_q(M)$ の元 β とに対してある元 $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q-1}(M)$ が次のように定義される。α, β はそれぞれ写像 $a : (D^p, \partial D^p) \to (M, x_0)$, $b : (D^q, \partial D^q) \to (M, x_0)$ により代表さ

れているとき $[\alpha,\beta]$ は写像 $c: \partial(D^{p+q}) = D^p \times \partial D^q \cup \partial D^p \times D^q \to M$, $c(x,y) = a(x)$ (if $y \in \partial D^q$), $b(y)$ (if $x \in \partial D^p$) により代表される。Whitehead 積には次の性質がある。

(i) $[\alpha,\beta] = (-1)^{pq}[\beta,\alpha]$

(ii) $(-1)^{pr}[[\alpha,\beta],\gamma] + (-1)^{qp}[[\beta,\gamma],\alpha] + (-1)^{rq}[[\gamma,\alpha],\beta] = 0$

$(\gamma \in \pi_r(M))$

従って $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\pi_{*-1}(M)\otimes\mathbb{R}$ には $\mathbb{R}$ 上の graded Lie algebra の構造が入る。

さて $\mathcal{M}(M)$ を M の極小モデルとする。$I = \mathcal{M}^+(M)/\mathcal{M}^+(M)\mathcal{M}^+(M)$ を $\mathcal{M}(M)$ の indecomposable element の全体とすると自然な同型

$$I \cong \mathrm{Hom}(\pi_*(M)\otimes\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

が存在する。更に $\mathcal{M}(M)$ の微分 d により誘導される I 上の余積は上の同型により Whitehead 積の dual に対応する。

3. Formal spaces と Formal mappings 前節で述べたように M の実ホモトピー型は M の極小モデル $\mathcal{M}(M)$ により完全に決定される。しかし多様体の中には（或はもっと一般に空間の中には）その実ホモトピー型が

コホモロジー環 $H^*(M;\mathbb{R})$ によって既に決定されてしまうものがある。このような空間は次のように定式化される [2]。

定義　M が formal であるとは DGA 写像 $\psi : \mathcal{M}(M) \to H^*(M;\mathbb{R})$ で ψ^* : コホモロジー同型 となるものが存在するときをいう。ここに $H^*(M;\mathbb{R})$ の微分は恒等的に 0 とする。

M が formal のときにはその極小モデル $\mathcal{M}(M)$ は $H^*(M;\mathbb{R})$ から構成することができる。更に写像に関しては次のように定義する。

定義　C^∞-写像 $f : M \to N$ が formal であるとは M, N が共に formal で次の図式がホモトピー可換のときをいう。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(N) & \xrightarrow{\psi} & H^*(N;\mathbb{R}) \\ \hat{f}\downarrow & & f^*\downarrow \\ \mathcal{M}(M) & \xrightarrow{\psi} & H^*(M;\mathbb{R}) \end{array}$$

ここに ψ は M, N の formalities を与える DGA 写像。

formal space と formal map に関する定理

6

としては次のものが著しい。

定理2（[2]）　コンパクト Kähler 多様体及びそれらの間の正則写像は formal である。

4.　$\pi_*(MU(p))\otimes\mathbb{R}$　ここで本題にもどろう。まず $\theta(V,P)$ の属すべき群 $\pi_*(MU(p))$ を決定したいのであるが Torsion は無視して $\pi_*(MU(p))\otimes\mathbb{R}$ を考える。（それに伴って $\theta(V,P)$ も $\theta_{\mathbb{R}}(V,P)$ と記す）まず定義により $MU(p)=D(\xi)/S(\xi)$ である。これは多様体ではないが多様体の対により近似することができる。従って 2, 3 節の結果が使える。（2, 3 節の結果は一般の単体複体に対して $\mathbb{Q}$ 上で成立する。本稿では簡単のために C^∞-多様体だけを考えたのである）。

まず $MU(p)$ は formal space であることがわかる。従ってその実ホモトピー群はそのコホモロジー環 $H^*(MU(p);\mathbb{R})$ により決まる。ところが Thom 同型により

$$\widetilde{H}^*(MU(p);\mathbb{R}) = \text{Ideal of } c_p \text{ in } H^*(BU(p))$$
$$= c_p\,\mathbb{R}[c_1,\cdots,c_p].$$

$F(p)$ を $MU(p)$ においてコホモロジー類 c_p を消した空間とする。$F(p)$ は $MU(p)$ 上の S^{2p-1} をファイバーとする

ファイバー空間の全空間と考えることができる。従って Gysin 系列により

$$\tilde{H}^*(F(p)) \cong H^*(c_p\mathbb{R}[c_1,\cdots,c_p](y)),\ dy=c_p$$
$$\cong \tilde{H}^*(\bigvee_\alpha S^{|c_pc_\alpha|})$$

となる。ここに c_α は $c_1,\cdots,c_{p-1}$ の monomial 全体を動き $|c_pc_\alpha| = c_pc_\alpha$ の次数，$\vee$ は one point union である。空間 $F(p)$ も formal であることがわかるので結局

$$F(p) \underset{\text{有理 h.e.}}{\sim} \bigvee_\alpha S^{|c_pc_\alpha|}$$

となる。従って Hilton [4] により次のことがわかる。

$$\pi_*(F(p))_{\otimes\mathbb{R}} \cong \{c_pc_\alpha\}_\alpha \text{ を生成元とする free Lie algebra } (=L \text{ と記す})$$

5. *Links of complex isolated singularities.*

P を V の孤立特異点とし $\theta_{\mathbb{R}}(V,P) \in \pi_{2n+1}(MU(p))\otimes\mathbb{R}$ を考える。$\pi_{2n+1}(MU(p))\otimes\mathbb{R} \cong \pi_{2n+1}(F(p))\otimes\mathbb{R} \cong L$ であるので $\theta_{\mathbb{R}}(V,P) \in L$ と思ってよい。Sullivan はこの元に関し次の予想をした（[9]）。

予想　$\theta_{\mathbb{R}}(V,P)$ は L の元として bracket をひとつしか含まないだろう。

この予想は志賀 [7] により特別な (V,P) に対して

証明されたのであるが後述するBarthの結果[1]を使うと彼の議論は全く一般の(V,P)に対して通用するので結局Sullivanの予想は肯定的に解かれたことになる。結論を詳しく述べると次のようになる。

定理3([7]) $\theta_{\mathbb{R}}(V,P)$を前述のものとする。
(i) n：偶数 $\Rightarrow$ $\theta_{\mathbb{R}}(V,P)=0$
(ii) n：奇数 $\Rightarrow$ $\theta_{\mathbb{R}}(V,P)$は$[C_pC_{r-\frac{n-1}{2}}, C_pC_{r-\frac{n-1}{2}}]$のスカラー倍。

志賀[7]の議論は次のようである。Vをnon-singular proj. manifold $M^r\subset \mathbb{C}P^n$上のaffine coneとする。このときには原点0が孤立特異点となるがLarsen[5]によりLは$(2r-n)$連結となる。従って分類写像$f:L\to BU(p)$は$BU(p)$の$(2r-n)$連結被覆$BU(p)\langle 2r-n\rangle$にリフトする。$MU(p)\langle 2r-n\rangle$を対応するThom spaceとすると$\theta(V,0)$は$\pi_{2n+1}(MU(p)\langle 2r-n\rangle)$の元と思える。ところが$L$のbracketを二個以上含む次数$(2n+1)$の元は$MU(p)\langle 2r-n\rangle$にはリフトしないことが計算によりわかるので上述の結果をうるのである。一般にはLは$(2r-n)$連結とは限らないが

もしれないが Barth [1] の結果：$H^*(L;\mathbb{C})=0$ for $0<*\leqq 2r-n$ があるので上の議論は一般の (V,P) に対して成立するのである。

ここでひとつだけ例をあげておく。V を Segre imbedding $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^n\subset\mathbb{P}^{2n+1}$ 上の cone とする。このとき $\mathcal{O}_R(V,0)$ は $[c_n c_1, c_n c_1]$ の non-zero multiple である。（[3] 参照）

6. 結語. 筆者は Sullivan の予想の意味を考える過程で次の疑問にぶつかった。

問 M をコンパクト Kähler 多様体 N をその余次元 p の複素部分多様体とする。V を N の法束とするとき写像

$$M \to D(V)/S(V)$$

は formal か？ 又はもっと弱く写像

$$M \to MU(p)$$

は formal か？

今のところ次の結果が得られている。

定理 4（[6]）　M を $\mathbb{C}P^n$ の中の余次元 p の複素部分多様体とする。このとき写像

$$M \to MU(p)$$

は formal である。

この定理は一言でいうと "余次元 p が小さいとき $\mathbb{C}P^n$ の中の複素部分多様体は C^∞ー部分多様体にくらべて非常に少ない" ことを意味する。なお定理 3 において V が proj manifold 上の cone のときには定理の主張は定理 4 からも従う。

一般の M に対する問の正否は今のところ何もわからない。

文　献

[1] Barth, W., Lokale Cohomologie bei isolierten Singularitäten analytischer Mengen, Schr. Math. Inst. Univ. Münster (2) Heft 5 (1971), 59 pp.

[2] Deligne, P., P. Griffiths, J. Morgan,

D. Sullivan, The real homotopy of Kähler manifolds, Invent. Math 29 (1975), 245-274

[3] Hartshorn, R., Topological conditions for smoothing algebraic singularities, Topology 13 (1974), 241-253.

[4] Hilton, P. J., On the homotopy groups of the union of spheres, J. London Math. Soc. 30 (1955), 154-171.

[5] Larsen, M. E., On the topology of complex projective manifolds, Invent. Math. 19 (1973), 251-260.

[6] Morita, S., in preparation.

[7] Shiga, H., Notes on links of complex isolated singular points, preprint.

[8] Sullivan, D., Differential forms and the topology of manifolds, Manifolds — Tokyo (1973), 37-49.

[9] Sullivan, D., Infinitesimal computations in topology, Publ. I. H. E. S. 48 (1978), 269-331.